Proceedings of IAM, V.11, N.2, 2022, pp.159-190

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА 3D БИАНКИ

А. ДЖ. АБДУЛЛАЕВА

Сумгаитский Государственный Университет, Сумгаит, Азербайджан
e-mail: aynure-huseynova-2015@mail.ru

Резюме. В данной статье построено фундаментальное решение краевых задач для гиперболического интегро-дифференциального уравнения типа 3D Бианки с доминирующей смешанной производной третьего порядка с негладкими коэффициентами.

Ключевые слова: гиперболические интегро-дифференциальные уравнения, краевая задача, фундаментальные решения.

AMS Subject Classification: 35L25, 35L35.

1. Введение.

В литературе существуют только отдельные работы, в которых исследованы вопросы построения фундаментальных решений для гиперболических уравнений с доминирующими производными (или псевдопараболических уравнений) с переменными коэффициентами. Работы D. Colton [1], М. Х. Шханукова и А. П. Солдатова [11], выполненные в этом направлении, показывают, что для некоторых классов таких уравнений с достаточно гладкими коэффициентами фундаментальное решение можно определить как аналог классической функции Римана. Однако, примененный в этих работах метод характеристик Римана является весьма ограниченным методом и, вообще говоря, не допускает обобщение даже на случай простых нелокальных задач, даже в случае уравнений с постоянными коэффициентами. Особо нужно отметить, что в литературе до сих пор функцию Римана для различных классов уравнений удавалось построить только для случая достаточно гладких коэффициентов. Поэтому возникает весьма актуальный вопрос об исследовании вопросов корректной разрешимости и построении фундаментальных решений для краевых задач, связных с гиперболическими уравнениями (или псевдопараболическими уравнениями) с доминирующими производными, вообще говоря, с негладкими переменными коэффициентами. В связи с этим данная продемонстрированная работа посвящена исследованию краевых задач нового типа для гиперболических интегро-дифференциальных уравнений типа 3D Бианки с доминирующими смешанными производными, обладающими, вообще говоря, негладкими Lp-коэффициентами (т. е. коэффициентами из пространств типа Lp) и вопросами разработки метода построения их фундаментальных решений. Она изложена, в основном, применительно к гиперболическим интегро-дифференциальным уравнениям третьего порядка типа 3D Бианки с трехкратными характеристиками. При этом важным принципиальным моментом является то, что рассматриваемое уравнение обладает разрывными коэффициентами, которые удовлетворяют только некоторым условиям типа P-интегрируемости и ограниченности, т. е. рассмотренный гиперболический интегро-дифференциальный оператор типа 3D Бианки не имеет традиционного сопряженного оператора. Поэтому функция Римана для такого уравнения не может быть исследована классическим методом характеристик. В данной статье для исследований таких задач разработана методика, которая существенно использует современные методы теории функций и функционального анализа. При помощи этой методики для краевых задач введено новое понятие сопряженной задачи. Такие сопряженные задачи, в отличие от сопряженных задач традиционного вида, определяемых посредством формально-сопряженных дифференциальных операторов, по определению имеют вид интегрального уравнения, и поэтому имеют смысл при достаточно слабых условиях на коэффициенты. При помощи такой сопряженной задачи введено понятие фундаментального решения и найдено интегральное представление для решений соответствующих краевых задач.

2. Постановка задачи.

Рассмотрим гиперболическое интегро-дифференциальное уравнение типа 3D Бианки

$$
\begin{gathered}
(V_{1,1,1}u)(x,y,z) \equiv u_{xyz}(x,y,z) + A_{0,0,0}u(x,y,z) + A_{1,0,0}u_x(x,y,z) + \\
+ A_{0,1,0}u_y(x,y,z) + A_{0,0,1}u_z(x,y,z) + A_{1,1,0}u_{xy}(x,y,z) + A_{0,1,1}u_{yz}(x,y,z) + \\
+ A_{1,0,1}u_{xz}(x,y,z) + \int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}\big[K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)u(\tau,\xi,\eta) + K_{1,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)\times \\
\times u_x(\tau,\xi,\eta) + K_{0,1,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)u_y(\tau,\xi,\eta) + K_{0,0,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)\times \qquad (1) \\
\times u_z(\tau,\xi,\eta) + K_{1,1,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)u_{xy}(\tau,\xi,\eta + K_{0,1,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)\times \\
\times u_{yz}(\tau,\xi,\eta) + K_{1,0,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)u_{xz}(\tau,\xi,\eta)\big]d\tau d\xi d\eta = \varphi_{1,1,1}(x,y,z), \quad (x,y,z)\in G,
\end{gathered}
$$

Здесь $u = u(x,y,z)$ искомая функция, определенная на $G; A_{i,j,k} = A_{i,j,k}(x,y,z)$ заданные измеримые функции на $G = G_1 \times G_2 \times G_3$, где $G_1 = (x_0,x_1)$, $G_2 = (y_0,y_1)$, $G_3 = (z_0,z_1)$; $\varphi_{1,1,1}(x,y,z)$ заданная измеримая функция на G.

Уравнение (1) является гиперболическим интегро-дифференциальным уравнением, которое обладает тремя действительными простыми характеристиками $x = const,$ $y = const,$ $z = const$.

Кроме того, в литературе до сих пор функцию Римана уравнения (1) удалось построить только для случая когда $K_{i,j,k}(\tau,\xi,\eta;x,y,z) \equiv 0$ а функции $A_{i,j,k}(x,y,z)$ являются достаточно гладкими /т.е. когда функции $A_{i,j,k}(x,y,z)$ непрерывны вместе с производными $D_x^i D_y^j D_z^k A_{i,j,k}(x,y,z)$ в области $\overline{G}$ /. В работе [5] исследовано уравнение с доминирующей производной u_{xyz}. Такого типа уравнение находит применение в моделях процессов вибрации, а также немаловажное значение имеет в теории аппроксимации. Поэтому в практике имеются задачи, которые непосредственно связаны с трехмерной краевой задачей или же с гиперболическим уравнением. Краевая задача, а также задача оптимального управления для гиперболических интегро-дифференциальных уравнений с доминирующей производной u_{xyz} исследовано в работах автора [7]- [8].

В данной работе уравнение (1) впервые исследовано в общем случае, когда коэффициенты $A_{i,j,k}(x,y,z)$ и $K_{i,j,k}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)$являются негладкими функциями, удовлетворяющими лишь следующим условиям:

$$A_{0,0,0}(x,y,z) \in L_p(G), A_{1,0,0}(x,y,z) \in L^{x,y,z}_{\infty,p,p}(G), A_{0,1,0}(x,y,z) \in L^{x,y,z}_{p,\infty,p}(G),$$

$$A_{0,0,1}(x,y,z) \in L^{x,y,z}_{p,p,\infty}(G), A_{1,1,0}(x,y,z) \in L^{x,y,z}_{\infty,\infty,p}(G), A_{0,1,1}(x,y,z) \in L^{x,y,z}_{p,\infty,\infty}(G),$$

$$A_{1,0,1}(x,y,z) \in L^{x,y,z}_{\infty,p,\infty}(G), K_{i,j,k}(\tau,\xi,\eta;x,y,z) \in L_\infty(G \times G).$$

При этих условиях решение $u(x,y,z)$ уравнения (1) будем искать в пространстве С.Л. Соболева

$$W_p^{(1,1,1)}(G) = \{u \in L_p(G) / D_x^i D_y^j D_z^k u \in L_p(G); \quad i,\ j, k = 0,1\},$$

где $1 \le p \le \infty$. Норму в пространстве $W_p^{(1,1,1)}(G)$ будем определять равенством $\|u\|_{W_p^{(1,1,1)}(G)} = \sum\limits_{i,j,k=0}^{1} \left\| D_x^i D_y^j D_z^k u \right\|_{L_p(G)}$.

Для уравнения (1) условия на середине области неклассического вида можно задавать в виде

$$\begin{cases} V_{0,0,0}u \equiv u(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2},\frac{z_0+z_1}{2}) = \varphi_{0,0,0} \\ (V_{1,0,0}u)(x) \equiv u_x(x,\frac{y_0+y_1}{2},\frac{z_0+z_1}{2}) = \varphi_{1,0,0}(x), \\ (V_{0,1,0}u)(y) \equiv u_y(\frac{x_0+x_1}{2},y,\frac{z_0+z_1}{2}) = \varphi_{0,1,0}(y), \\ (V_{0,0,1}u)(z) \equiv u_z(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2},z) = \varphi_{0,0,1}(z), \\ (V_{1,1,0}u)(x,y) \equiv u_{xy}(x,y,\frac{z_0+z_1}{2}) = \varphi_{1,1,0}(x,y), \\ (V_{0,1,1}u)(y,z) \equiv u_{yz}(\frac{x_0+x_1}{2},y,z) = \varphi_{0,1,1}(y,z), \\ (V_{1,0,1}u)(x,z) \equiv u_{xz}(x,\frac{y_0+y_1}{2},z) = \varphi_{1,0,1}(x,z), \end{cases} \tag{2}$$

где $\varphi_{0,0,0} \in R$ является заданным числом, а остальные $\varphi_{i,j,k}$ являются заданными функциями, удовлетворяющими условиям:

$$\varphi_{1,0,0}(x) \in L_p(G_1), \varphi_{0,1,0}(y) \in L_p(G_2), \varphi_{0,0,1}(z) \in L_p(G_3), \varphi_{1,1,0}(x,y) \in L_p(G_1 \times G_2),$$

$$\varphi_{0,1,1}(y,z) \in L_p(G_2 \times G_3), \varphi_{1,0,1}(x,z) \in L_p(G_1 \times G_3).$$

3. Операторный вид краевой задачи заданной на середине области.

Задачу (1), (2) мы будем исследовать методом операторных уравнений и при этом будем следовать схемы работы [9]. Предварительно задачу (1),(2) запишем в виде операторного уравнения

$$Vu = \varphi, \tag{3}$$

где V есть векторный оператор, определяемый посредством равенства $V = (V_{0,0,0}, V_{1,0,0}, V_{0,1,0}, V_{0,0,1}, V_{1,1,0}, V_{0,1,1}, V_{1,0,1}, V_{1,1,1}) : W_p^{(1,1,1)}(G) \to \mathrm{E}_p^{(1,1,1)}$ а φ есть заданный векторный элемент вида

$\varphi = (\varphi_{0,0,0}, \varphi_{1,0,0}, \varphi_{0,1,0}, \varphi_{0,0,1}, \varphi_{1,1,0}, \varphi_{0,1,1}, \varphi_{1,0,1}, \varphi_{1,1,1})$ из пространства

$$\mathrm{E}_p^{(1,1,1)} \equiv R \times L_p(x_0,x_1) \times L_p(y_0,y_1) \times L_p(z_0,z_1) \times L_p(G_1 \times G_2) \times$$
$$\times L_p(G_2 \times G_3) \times L_p(G_1 \times G_3) \times L_p(G).$$

Заметим, что в пространстве $\mathrm{E}_p^{(1,1,1)}$ норму будем определять естественным образом, при помощи равенства

$$\|\varphi\|_{E_p^{(1,1,1)}} = \|\varphi_{0,0,0}\|_R + \|\varphi_{1,0,0}\|_{L_p(x_0,x_1)} + \|\varphi_{0,1,0}\|_{L_p(y_0,y_1)} + \|\varphi_{0,0,1}\|_{L_p(z_0,z_1)} +$$
$$+\|\varphi_{1,1,0}\|_{L_p(G_1\times G_2)} + \|\varphi_{0,1,1}\|_{L_p(G_2\times G_3)} + \|\varphi_{1,0,1}\|_{L_p(G_1\times G_3)} + \|\varphi_{1,1,1}\|_{L_p(G)}.$$

Прежде всего отметим, что интегральные представления функций из пространств типа $W_p^{(1,1,1)}(G)$ (из Соболевских пространств с доминирующими смешанными производными общего вида) изучены в работах Т.И. Аманова [2], С.М. Никольского [10], П.И. Лизоркина и С.М. Никольского [6], О.В. Бесова, В.П. Ильина и С.М. Никольского [4], С.С. Ахиева [3] и др. Но из них мы будем использовать интегральное представление из [3], по которому любая функция $u(x,y,z)\in W_p^{(1,1,1)}(G)$ единственным образом представима в виде

$$u(x,y,z) = (Qb)(x,y,z) \equiv b_{0,0,0} + \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} b_{1,0,0}(\alpha)d\alpha + \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} b_{0,1,0}(\beta)d\beta + \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} b_{0,0,1}(\gamma)d\gamma +$$
$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} b_{1,1,0}(\alpha,\beta)d\alpha d\beta + \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} b_{0,1,1}(\beta,\gamma)d\beta d\gamma + \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} b_{1,0,1}(\alpha,\gamma)d\alpha d\gamma +$$
$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} b_{1,1,1}(\alpha,\beta,\gamma)d\alpha d\beta d\gamma \tag{4}$$

посредством единственного элемента $b = (b_{0,0,0}, b_{1,0,0}, b_{0,1,0}, b_{0,0,1}, b_{1,1,0}, b_{0,1,1}, b_{1,0,1}, b_{1,1,1}) \in E_p^{(1,1,1)}$.

При этом существуют положительные постоянные M_1^0 и M_2^0 такие, что

$$M_1^0\|b\|_{E_p^{(1,1,1)}} \le \|Qb)(x,y,z)\|_{W_p^{(1,1,1)}(G)} \le M_2^0\|b\|_{E_p^{(1,1,1)}}, \quad \text{для любых } b\in E_p^{(1,1,1)} \tag{5}$$

Очевидно, что оператор $Q: E_p^{(1,1,1)} \to W_p^{(1,1,1)}(G)$ является линейным ограниченным оператором. Неравенство (5) показывает, что оператор Q имеет также ограниченный обратный оператор определенную на пространстве $W_p^{(1,1,1)}(G)$. Следовательно, оператор Q есть гомеоморфизм между банаховыми пространствами $E_p^{(1,1,1)}$ и $W_p^{(1,1,1)}(G)$. Поэтому решение уравнения (3) эквивалентно решению уравнения

$$VQb = \varphi \tag{6}$$

Уравнение (6) будем называть каноническим видом уравнения (3).

Кроме того, формула (4) показывает, что любая функция $u \in W_p^{(1,1,1)}(G)$ имеет следы :

$$u(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}, \frac{z_0+z_1}{2}), u_x(x\ , \frac{y_0+y_1}{2}, \frac{z_0+z_1}{2}), u_y(\frac{x_0+x_1}{2}, y\ , \frac{z_0+z_1}{2}),$$

$$u_z(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}, z\ ), u_{xy}(x\ , y\ , \frac{z_0+z_1}{2}), u_{yz}(\frac{x_0+x_1}{2}, y\ , z\ ), u_{xz}(x\ , \frac{y_0+y_1}{2}, z\ )$$

и операции взятия этих следов непрерывны из $W_p^{(1,1,1)}(G)$ в R, $L_p(x_0,x_1)$, $L_p(y_0,y_1)$, $L_p(z_0,z_1)$, $L_p(G_1\times G_2)$, $L_p(G_2\times G_3)$, $L_p(G_1\times G_3)$ соответственно. Далее для этих следов справедливы также равенства:

$$u(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}, \frac{z_0+z_1}{2}) = b_{0,0,0},\ u_x(x, \frac{y_0+y_1}{2}, \frac{z_0+z_1}{2}) = b_{1,0,0}(x),$$

$$u_y(\frac{x_0+x_1}{2}, y\ , \frac{z_0+z_1}{2}) = b_{0,1,0}(y),\ u_z(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}, z\ ) = b_{0,0,1}(z),$$

$$u_{xy}(x, y\ , \frac{z_0+z_1}{2}) = b_{1,1,0}(x,y), u_{yz}(\frac{x_0+x_1}{2}, y\ , z\ ) = b_{0,1,1}(y,z),$$

$$u_{xz}(x, \frac{y_0+y_1}{2}, z\ ) = b_{1,0,1}(x,z).$$

4. Эквивалентное интегральное уравнение для краевой задачи.

Задачу (1), (2) мы будем изучать при помощи интегрального представления (4) функций $u \in W_p^{(1,1,1)}(G)$. Формула (4) показывает, что функция $u \in W_p^{(1,1,1)}(G)$, удовлетворяющая условиям (2), имеет вид:

$$u(x,y,z) = g_0(x,y,z) + \int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1} \int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} \int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} u_{xyz}(\alpha,\beta,\gamma) R_0(\alpha,\beta,\gamma;x,y,z)\, d\alpha d\beta d\gamma,$$

где $$g_0(x,y,z) = \varphi_{0,0,0} + \int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} \varphi_{1,0,0}(\alpha)d\alpha + \int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} \varphi_{0,1,0}(\beta)d\beta + \int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} \varphi_{0,0,1}(\gamma)d\gamma +$$

$$+ \int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} \int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} \varphi_{1,1,0}(\alpha,\beta)d\alpha d\beta + \int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} \int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} \varphi_{0,1,1}(\beta,\gamma)d\beta d\gamma + \int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} \int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} \varphi_{1,0,1}(\alpha,\gamma)d\alpha d\gamma$$

и $R_0(\alpha,\beta,\gamma;x,y,z) = \theta(x-\alpha)\theta(y-\beta)\theta(z-\gamma),$ причем $\theta(z)$ является функцией Хевисайда на R, т.е. $\theta(z)=\begin{cases}1, z>0\\ 0, z\le 0\end{cases}$. Тогда после замены

$u=g_0+\hat{u},$ где

$$\hat{u}(x,y,z)=\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1}R_0(\alpha,\beta,\gamma;x,y,z)U_{xyz}(\alpha,\beta,\gamma)d\alpha d\beta d\gamma,$$

уравнение (1) можно записать в виде

$$(V_{1,1,1}\hat{u})(x,y,z)=\hat{Z}(x,y,z), \tag{7}$$

где $\hat{Z}=\varphi_{1,1,1}-V_{1,1,1}g_0$.

Очевидно, что производные функции $\hat{u}$ можно вычислить посредством равенств

$$\hat{u}_x(x,y,z)=\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}u_{xyz}(x,\beta,\gamma)d\beta d\gamma,\ \hat{u}_y(x,y,z)=\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}u_{xyz}(\alpha,y,\gamma)d\alpha d\gamma,$$

$$\hat{u}_z(x,y,z)=\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}u_{xyz}(\alpha,\beta,z)d\alpha d\beta,\ \hat{u}_{xy}(x,y,z)=\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}u_{xyz}(x,y,\gamma)d\gamma,$$

$$\hat{u}_{yz}(x,y,z)=\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}u_{xyz}(\alpha,y,z)d\alpha,\ \hat{u}_{xz}(x,y,z)=\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}u_{xyz}(x,\beta,z)d\beta,$$

$$\hat{u}_{xyz}(x,y,z)=u_{xyz}(x,y,z).$$

Теперь доминирующую производную рассмотрим как неизвестную функцию, иначе говоря, произведем замену $u_{xyz}(x,y,z)=b(x,y,z)$. Тогда уравнение (7) можно записать в виде:

$$(Nb)(x,y,z)\equiv b(x,y,z)+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}A_{0,0,0}(x,y,z)R_0(\alpha,\beta,\gamma;x,y,z)b(\alpha,\beta,\gamma)d\alpha d\beta d\gamma+$$

$$+\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}A_{1,0,0}(x,y,z)b(x,\beta,\gamma)d\beta d\gamma+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}A_{0,1,0}(x,y,z)b(\alpha,y,\gamma)d\alpha d\gamma+$$

$$+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}A_{0,0,1}(x,y,z)b(\alpha,\beta,z)d\alpha d\beta+\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}A_{1,1,0}(x,y,z)b(x,y,\gamma)d\gamma+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} A_{0,1,1}(x,y,z)b(\alpha,y,z)d\alpha+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} A_{1,0,1}(x,y,z)b(x,\beta,z)d\beta+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}\left[\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\tau}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\xi}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\eta} K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)R_0(\alpha,\beta,\gamma;x,y,z)\times\right.$$

$$\times b(\alpha,\beta,\gamma)d\alpha d\beta d\gamma+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\xi}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\eta} K_{1,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)b(\tau,\beta,\gamma)d\beta d\gamma+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\tau}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\eta} K_{0,1,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)b(\alpha,\xi,\gamma)d\alpha d\gamma+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\tau}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\xi} K_{0,0,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)b(\alpha,\beta,\eta)d\alpha d\beta+$$

$$+\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\eta} K_{1,1,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)b(\tau,\xi,\gamma)d\gamma+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\tau} K_{0,1,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)b(\alpha,\xi,\eta)d\alpha+$$

$$\left.+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\eta} K_{1,0,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z))b(\tau,\beta,\eta)d\beta\right]d\tau d\xi d\eta=\hat{z}(x,y,z),(x,y,z)\in G, \quad (8)$$

Оператор N уравнения (8) линеен. Используя условия, наложенные на коэффициенты $A_{i,j,k}$, можно доказать, что этот оператор является ограниченным оператором из $L_p(G)$ в $L_p(G)$, $1\le p\le\infty$.

Определение 1. Если задача (1), (2) для любого $\varphi=(\varphi_{0,0,0},\varphi_{1,0,0},\varphi_{0,1,0},\varphi_{0,0,1},\varphi_{1,1,0},\varphi_{0,1,1},\varphi_{1,0,1},\varphi_{1,1,1})\in E_p^{(1,1,1)}$ имеет единственное решение $u\in W_p^{(1,1,1)}(G)$ такое, что $\|u\|_{W_p^{(1,1,1)}(G)}\le M_1\|\varphi\|_{E_p^{(1,1,1)}}$, то будем говорить, что оператор V задачи (1), (2) (или уравнения (3)) является гомеоморфизмом из $W_p^{(1,1,1)}(G)$ на $E_p^{(1,1,1)}$ или задача (1), (2) везде корректно разрешима. Здесь M_1 постоянная не зависящее от φ.

Очевидно, что, если оператор V задачи (1), (2) является гомеоморфизмом из $W_p^{(1,1,1)}(G)$ на $E_p^{(1,1,1)}$, то существует ограниченный обратный оператор $V^{-1}: E_p^{(1,1,1)} \to W_p^{(1,1,1)}(G)$.

Оператор N является вольтерровым оператором относительно точки $(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}, \frac{z_0+z_1}{2})$. Это означает, что если функции $b_1, b_2 \in L_p(G)$ в области

$$G_{(x,y,z)} = (\frac{x_0+x_1}{2}, x) \times (\frac{y_0+y_1}{2}, y) \times (\frac{z_0+z_1}{2}, z)$$

удовлетворяют условию $b_1(\alpha,\beta,\gamma) = b_2(\alpha,\beta,\gamma)$, то выполняется также условие

$$(Nb_1)(\alpha,\beta,\gamma) = (Nb_2)(\alpha,\beta,\gamma)$$

почти для всех $(\alpha,\beta,\gamma) \in G_{(x,y,z)}$, где $(x,y,z) \in G$ произвольная точка.

Используя вольтерровость оператора N, при помощи, например, метода последовательных приближений можно доказать, что уравнение (8) для любой правой части $\hat{Z} \in L_p(G)$ имеет единственное решение $b \in L_p(G)$, где $1 \le p \le \infty$, и это решение удовлетворяет условию

$$\|b\|_{L_p(G)} \le M_2 \|\hat{Z}\|_{L_p(G)},$$

где M_2 постоянное не зависящее от $\hat{Z}$. Далее, очевидно, что если $\varphi_{1,1,1} \in L_p(G)$, то $\hat{Z} \in L_p(G)$. Кроме того, если $b \in L_p(G)$ есть решение уравнения (8), то решение задачи (1), (2) можно найти при помощи равенства

$$u(x,y,z) = g_0(x,y,z) + \int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1} \int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} \int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} b(\alpha,\beta,\gamma) R_0(\alpha,\beta,\gamma; x,y,z)\, d\alpha d\beta d\gamma .$$

Поэтому справедлива

Теорема 1. Оператор задачи (1), (2) есть гомеоморфизмом из $W_p^{(1,1,1)}(G)$ на $E_p^{(1,1,1)}$.

5. Построение сопряженного оператора.

Пусть

$$f = \left(f_{0,0,0}, f_{1,0,0}(x), f_{0,1,0}(y), f_{0,0,1}(z), f_{1,1,0}(x,y), f_{0,1,1}(y,z), f_{1,0,1}(x,z), f_{1,1,1}(x,y,z)\right) \in E_q^{(1,1,1)} \equiv$$
$$\equiv R \times L_q(x_0,x_1) \times L_q(y_0,y_1) \times L_q(z_0,z_1) \times L_q(G_1 \times G_2) \times L_q(G_2 \times G_3) \times L_q(G_1 \times G_3) \times L_q(G)$$

где $1/p+1/q=1$ некоторый линейный ограниченный функционал на $E_p^{(1,1,1)}$. Тогда по определению имеем

$$f(Vu)=\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(x,y,z)(V_{1,1,1}u)(x,y,z)dxdydz+f_{0,0,0}(V_{0,0,0}u)+$$

$$+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1} f_{1,0,0}(x)(V_{1,0,0}u)(x)dx+\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} f_{0,1,0}(y)(V_{0,1,0}u)(y)dy+\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{0,0,1}(z)(V_{0,0,1}u)(z)dz+$$

$$+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} f_{1,1,0}(x,y)(V_{1,1,0}u)(x,y)dxdy+\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{0,1,1}(y,z)(V_{0,1,1}u)(y,z)dydz$$

$$+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,0,1}(x,z)(V_{1,0,1}u)(x,z)dxdz \tag{9}$$

Учитывая здесь выражения операторов $V_{i,j,k}$ имеем

$$f(Vu)=\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(x,y,z)\{u_{xyz}(x,y,z)+A_{0,0,0}u(x,y,z)+$$

$$+A_{1,0,0}u_x(x,y,z)+A_{0,1,0}u_y(x,y,z)+A_{0,0,1}u_z(x,y,z)+A_{1,1,0}u_{xy}(x,y,z)+$$

$$+A_{0,1,1}u_{yz}(x,y,z)+A_{1,0,1}u_{xz}(x,y,z)+$$

$$+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}\Big[K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)u(\tau,\xi,\eta)+K_{1,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)\times$$

$$\times u_x(\tau,\xi,\eta)+K_{0,1,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)u_y(\tau,\xi,\eta)+K_{0,0,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)u_z(\tau,\xi,\eta)+$$

$$+K_{1,1,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)u_{xy}(\tau,\xi,\eta+K_{0,1,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)u_{yz}(\tau,\xi,\eta)+$$

$$+K_{1,0,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)u_{xz}(\tau,\xi,\eta)\Big]d\tau d\xi d\eta\Big\}dG+u\Big(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2},\frac{z_0+z_1}{2}\Big)f_{0,0,0}+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1} f_{1,0,0}(x)u_x(x,\frac{y_0+y_1}{2},\frac{z_0+z_1}{2})dx+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} f_{0,1,0}(y)u_y(\frac{x_0+x_1}{2},y,\frac{z_0+z_1}{2})dy+$$

$$+\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{0,0,1}(z)u_z(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2},z)dz+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} f_{1,1,0}(x,y)u_{xy}(x\ ,y\ ,\frac{z_0+z_1}{2})dxdy+$$

$$+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{0,1,1}(y,z)u_{yz}(\frac{x_0+x_1}{2},y\ ,z\ )dydz+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,0,1}(x,z)u_{xz}(x,y_0,z)dxdz \tag{10}$$

Используя интегральное представление (4) функций $u\in W_p^{(1,1,1)}(G)$, из (10) получим:

$$f(Vu)=\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(x,y,z)\times$$

$$\times\left\{\ u_{xyz}(x,y,z)+A_{0,0,0}(x,y,z)\left[u(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2},\frac{z_0+z_1}{2})+\right.\right.$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} u_x(\alpha,\frac{y_0+y_1}{2},\frac{z_0+z_1}{2})d\alpha+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} u_y(\frac{x_0+x_1}{2},\beta,\frac{z_0+z_1}{2})d\beta+$$

$$+\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} u_z(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2},\gamma)d\gamma+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} u_{xy}(\alpha,\beta,\frac{z_0+z_1}{2})d\alpha d\beta+$$

$$+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} u_{yz}(\frac{x_0+x_1}{2},\beta,\gamma)d\beta d\gamma+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} u_{xz}(\alpha,\frac{y_0+y_1}{2},\gamma)d\alpha d\gamma+$$

$$+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}u_{xyz}(\alpha,\beta,\gamma)d\alpha d\beta d\gamma\Big]+A_{1,0,0}(x,y,z)\Big[u_x(x,\frac{y_0+y_1}{2},\frac{z_0+z_1}{2})+$$

$$+\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}u_{xy}(x,\beta,\frac{z_0+z_1}{2})d\beta+\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}u_{xz}(x,\frac{y_0+y_1}{2},\gamma)d\gamma+$$

$$+\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}u_{xyz}(x,\beta,\gamma)d\beta d\gamma\Big]+$$

$$+A_{0,1,0}(x,y,z)\times\Big[u_y(\frac{x_0+x_1}{2},y,\frac{z_0+z_1}{2})+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}u_{xy}(\alpha,y,z_0)d\alpha+$$

$$+\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}u_{yz}(\frac{x_0+x_1}{2},y,\gamma)d\gamma+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}u_{xyz}(\alpha,y,\gamma)d\alpha d\gamma\Big]+$$

$$+A_{0,0,1}(x,y,z)\Big[u_z(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2},z)+\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}u_{yz}(\frac{x_0+x_1}{2},\beta,z)d\beta+$$

$$+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}u_{xz}(\alpha,\frac{y_0+y_1}{2},z)d\alpha+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}u_{xyz}(\alpha,\beta,z)\times d\alpha d\beta\Big]+$$

$$+A_{1,1,0}(x,y,z)\Big[u_{xy}(x,y,\frac{z_0+z_1}{2})+$$

$$+\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}u_{xyz}(x,y,\gamma)d\gamma\Big]+A_{0,1,1}(x,y,z)\Big[u_{yz}(\frac{x_0+x_1}{2},y,z)+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}u_{xyz}(\alpha,y,z)d\alpha]+$$

$$+A_{1,0,1}(x,y,z)[u_{xz}(x,\frac{y_0+y_1}{2},z)+\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}u_{xyz}(x,\beta,z)d\beta]+$$

$$+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}\Big[K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)[u(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2},\frac{z_0+z_1}{2})+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\tau} u_x(\alpha,\frac{y_0+y_1}{2},\frac{z_0+z_1}{2})d\alpha+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\xi} u_y(\frac{x_0+x_1}{2},\beta,\frac{z_0+z_1}{2})d\beta+$$

$$+\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\eta} u_z(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2},\gamma)d\gamma+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\tau}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\xi} u_{xy}(\alpha,\beta,\frac{z_0+z_1}{2})d\alpha d\beta+$$

$$+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\xi}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\eta} u_{yz}(\frac{x_0+x_1}{2},\beta,\gamma)d\beta d\gamma+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\tau}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\eta} u_{xz}(\alpha,\frac{y_0+y_1}{2},\gamma)d\alpha d\gamma+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\tau}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\xi}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\eta} u_{xyz}(\alpha,\beta,\gamma)d\alpha d\beta d\gamma]+$$

$$+K_{1,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)[u_x(\tau,\frac{y_0+y_1}{2},\frac{z_0+z_1}{2})+$$

$$+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\xi} u_{xy}(\tau,\beta,z_0)d\beta+\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\eta} u_{xz}(\tau,\frac{y_0+y_1}{2},\gamma)d\gamma+$$

$$+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\xi}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\eta} u_{xyz}(\tau,\beta,\gamma)d\beta d\gamma]+$$

$$+K_{0,1,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)[u_y(x_0,\xi,\frac{z_0+z_1}{2})+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\tau} u_{xy}(\alpha,\xi,\frac{z_0+z_1}{2})d\alpha+$$

$$+\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\eta} u_{yz}(x_0,\xi,\gamma)d\gamma+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\tau}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\eta} u_{xyz}(\alpha,\xi,\gamma)d\alpha d\gamma]+$$

$$+K_{0,0,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)[u_z(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2},\eta)+$$

$$+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\xi} u_{yz}(\frac{x_0+x_1}{2},\beta,\eta)d\beta+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\tau} u_{xz}(\alpha,\frac{y_0+y_1}{2},\eta)d\alpha+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\tau}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\xi} u_{xyz}(\alpha,\beta,\eta)d\alpha d\beta]+$$

$$+K_{1,1,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)[u_{xy}(\tau,\xi,\frac{z_0+z_1}{2})+\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\eta}u_{xyz}(\tau,\xi,\gamma)d\gamma]+$$

$$+K_{0,1,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)[u_{yz}(\frac{x_0+x_1}{2},\xi,\eta)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\tau}u_{xyz}(\alpha,\xi,\eta)d\alpha]+$$

$$\left.+K_{1,0,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)[u_{xz}(\tau,\frac{y_0+y_1}{2},\eta)+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\xi}u_{xyz}(\tau,\beta,\eta)d\beta]\Big]d\tau d\xi d\eta\right\}dG+$$

$$+u(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2},\frac{z_0+z_1}{2})f_{0,0,0}+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}f_{1,0,0}(x)u_x(x\ ,\frac{y_0+y_1}{2},\frac{z_0+z_1}{2})dx+$$

$$+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}f_{0,1,0}(y)u_y(\frac{x_0+x_1}{2},y,\frac{z_0+z_1}{2})dy+\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1}f_{0,0,1}(z)u_z(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2},z)dz+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}f_{1,1,0}(x,y)u_{xy}(x\ ,y\ ,\frac{z_0+z_1}{2})dxdy+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1}f_{0,1,1}(y,z)u_{yz}(\frac{x_0+x_1}{2},y\ ,z\ )dydz+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1}f_{1,0,1}(x,z)u_{xz}(x\ ,\frac{y_0+y_1}{2},z\ )dxdz$$

Произведя здесь некоторые группировки, имеем

$$f(Vu)=u(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2},\frac{z_0+z_1}{2})\Bigg(\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1}f_{1,1,1}(x,y,z)[A_{0,0,0}(x,y,z)+$$

$$\left.+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)d\tau d\xi d\eta]dG+f_{0,0,0}\right)+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}u_x(x,\frac{y_0+y_1}{2},\frac{z_0+z_1}{2})\times$$

$$\times\left(\int\limits_{x}^{x_1}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(\alpha,y,z)[A_{0,0,0}(\alpha,y,z)+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;\alpha,y,z)d\tau d\xi d\eta]d\alpha dydz+\right.$$

$$+\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(x,y,z)[A_{1,0,0}(x,y,z)+$$

$$\left.+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}K_{1,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)d\tau d\xi d\eta]dydz+f_{1,0,0}(x)\right)dx$$

$$+\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} u_y\left(\frac{x_0+x_1}{2},y,\frac{z_0+z_1}{2}\right)\left(\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int\limits_{y}^{y_1}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(x,\beta,z)[A_{0,0,0}(x,\beta,z)+\right.$$

$$+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,\beta,z)d\tau d\xi d\eta]dxd\beta dz+$$

$$+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(x,y,z)[A_{0,1,0}(x,y,z)+$$

$$\left.+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}K_{0,1,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)d\tau d\xi d\eta]dxdz+f_{0,1,0}(y)\right)dy+$$

$$+\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} u_z\left(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2},z\right)\left(\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int\limits_{z}^{z_1} f_{1,1,1}(x,y,\gamma)[A_{0,0,0}(x,y,\gamma)+\right.$$

$$+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma}K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,\gamma)d\tau d\xi d\eta]dxdyd\gamma+$$

$$\left.+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} f_{1,1,1}(x,y,z)[A_{0,0,1}(x,y,z)+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}K_{0,0,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)d\tau d\xi d\eta]dxdy+f_{0,0,1}(z)\right)dz+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} u_{xy}(x,y,\frac{z_0+z_1}{2})\times$$

$$\times\left(\int_{x}^{x_1}\int_{y}^{y_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(\alpha,\beta,z)[A_{0,0,0}(\alpha,\beta,z)+\right.$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;\alpha,\beta,z)\,d\tau d\xi d\eta]\,d\alpha d\beta+$$

$$+\int_{y}^{y_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(x,\beta,z)[A_{1,0,0}(x,\beta,z)+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{1,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,\beta,z)\,d\tau d\xi d\eta]\,d\beta dz+$$

$$+\int_{x}^{x_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(\alpha,y,z)[A_{0,1,0}(\alpha,y,z)+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{0,1,0}(\tau,\xi,\eta;\alpha,y,z)\,d\tau d\xi d\eta]\,d\alpha dz+\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(x,y,z)[A_{1,1,0}(x,y,z)+$$

$$\left.+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{1,1,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)\,d\tau d\xi d\eta]\,dz+f_{1,1,0}(x,y)\right)dxdy+$$

$$+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} u_{yz}(\frac{x_0+x_1}{2},y,z)\left(\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int_{y}^{y_1}\int_{z}^{z_1} f_{1,1,1}(x,\beta,\gamma)[A_{0,0,0}(x,\beta,\gamma)+\right.$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma} K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,\beta,\gamma)\,d\tau d\xi d\eta]\,dxd\beta d\gamma+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(x,y,\gamma)[A_{0,1,0}(x,y,\gamma)+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma} K_{0,1,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,\gamma)d\tau d\xi d\eta]dxd\gamma+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} f_{1,1,1}(x,\beta,z)[A_{0,0,1}(x,\beta,z)+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{0,0,1}(\tau,\xi,\eta;x,\beta,z)d\tau d\xi d\eta]dxd\beta+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1} f_{1,1,1}(x,y,z)[A_{0,1,1}(x,y,z)+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{0,1,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)d\tau d\xi d\eta]dx+f_{0,1,1}(y,z)\Big)dydz+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} u_{xz}\left(x,\frac{y_0+y_1}{2},z\right)\left(\int_{x}^{x_1}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int_{z}^{z_1} f_{1,1,1}(\alpha,y,\gamma)[A_{0,0,0}(\alpha,y,\gamma)+\right.$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int^{\gamma} K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;\alpha,y,\gamma)d\tau d\xi d\eta]d\alpha dyd\gamma+$$

$$+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int_{z}^{z_1} f_{1,1,1}(x,y,\gamma)[A_{1,0,0}(x,y,\gamma)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma} K_{1,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,\gamma)d\tau d\xi d\eta]dyd\gamma+$$

$$+\int_{x}^{x_1}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} f_{1,1,1}(\alpha,y,z)[A_{0,0,1}(\alpha,y,z)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{0,0,1}(\tau,\xi,\eta;\alpha,y,z)d\tau d\xi d\eta]d\alpha dy+$$

$$+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} f_{1,1,1}(x,y,z)[A_{1,0,1}(x,y,z)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{1,0,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)d\tau d\xi d\eta]dy+$$

$$\left.+f_{1,0,1}(x,z)\right)dxdz+\iiint_G u_{xyz}(x,y,z)\Big(f_{1,1,1}(x,y,z)+$$

$$+\int_x^{x_1}\int_y^{y_1}\int_z^{z_1} f_{1,1,1}(\alpha,\beta,\gamma)[A_{0,0,0}(\alpha,\beta,\gamma)+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma} K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;\alpha,\beta,\gamma)d\tau d\xi d\eta]d\alpha d\beta d\gamma+$$

$$+\int_y^{y_1}\int_z^{z_1} f_{1,1,1}(x,\beta,\gamma)[A_{1,0,0}(x,\beta,\gamma)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma} K_{1,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,\beta,\gamma)d\tau d\xi d\eta]d\beta d\gamma+$$

$$+\int_x^{x_1}\int_z^{z_1} f_{1,1,1}(\alpha,y,\gamma)[A_{0,1,0}(\alpha,y,\gamma)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma} K_{0,1,0}(\tau,\xi,\eta;\alpha,y,\gamma)d\tau d\xi d\eta]d\alpha d\gamma+$$

$$+\int_x^{x_1}\int_y^{y_1} f_{1,1,1}(\alpha,\beta,z)[A_{0,0,1}(\alpha,\beta,z)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{0,0,1}(\tau,\xi,\eta;\alpha,\beta,z)d\tau d\xi d\eta]d\alpha d\beta+$$

$$+\int_z^{z_1} f_{1,1,1}(x,y,\gamma)[A_{1,1,0}(x,y,\gamma)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma} K_{1,1,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,\gamma)d\tau d\xi d\eta]d\gamma+$$

$$+\int_x^{x_1} f_{1,1,1}(\alpha,y,z)[A_{0,1,1}(\alpha,y,z)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{0,1,1}(\tau,\xi,\eta;\alpha,y,z)d\tau d\xi d\eta]d\alpha+$$

$$+\int_y^{y_1} f_{1,1,1}(x,\beta,z)[A_{1,0,1}(x,\beta,z)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{1,0,1}(\tau,\xi,\eta;x,\beta,z)d\tau d\xi d\eta]d\beta \Bigg)dG.$$

Таким образом, выражение $f(Vu)$ приведено к виду

$$f(Vu)=u(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2},\frac{z_0+z_1}{2})(\omega_{0,0,0}f)+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1} u_x(x,\frac{y_0+y_1}{2},\frac{z_0+z_1}{2})(\omega_{1,0,0}f)(x)dx+$$

$$+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} u_y(\frac{x_0+x_1}{2},y,\frac{z_0+z_1}{2})(\omega_{0,1,0}f)(y)dy+$$

$$+\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} u_z\left(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2},z\right)(\omega_{0,0,1}f)(z)dz+ \qquad (11)$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} u_{xy}\left(x,y,\frac{z_0+z_1}{2}\right)(\omega_{1,1,0}f)(x,y)dxdy+$$

$$+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} u_{yz}\left(\frac{x_0+x_1}{2},y,z\right)(\omega_{0,1,1}f)(y,z)dydz+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} u_{xz}\left(x,\frac{y_0+y_1}{2},z\right)(\omega_{1,0,1}f)(x,z)dxdz+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} u_{xyz}(x,y,z)(\omega_{1,1,1}f)(x,y,z)dxdydz\equiv(V^*f)(u),$$

где, $\omega_{0,0,0}f\equiv\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(x,y,z)[A_{0,0,0}(x,y,z)+$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)d\tau d\xi d\eta]dG+f_{0,0,0},$$

$$(\omega_{1,0,0}f)(x)\equiv\int_{x}^{x_1}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(\alpha,y,z)[A_{0,0,0}(\alpha,y,z)+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;\alpha,y,z)d\tau d\xi d\eta]d\alpha dydz+$$

$$+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1.1.1}(x,y,z)[A_{1,0,0}(x,y,z)+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{1,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)d\tau d\xi d\eta]dydz+f_{1,0,0}(x),$$

$$(\omega_{0,1,0} f)(y) \equiv \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1} \int_{y}^{y_1} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(x,\beta,z)[A_{0,0,0}(x,\beta,z)$$

$$+ \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,\beta,z)d\tau d\xi d\eta]dxd\beta dz +$$

$$+ \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(x,y,z)[A_{0,1,0}(x,y,z) + \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{0,1,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)d\tau d\xi d\eta]dxdz +$$

$$+ f_{0,1,0}(y) \;,$$

$$(\omega_{0,0,1} f)(z) \equiv \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} \int_{z}^{z_1} f_{1,1,1}(x,y,\gamma)[A_{0,0,0}(x,y,\gamma) +$$

$$+ \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma} K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,\gamma)d\tau d\xi d\eta]dxdyd\gamma +$$

$$+ \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} f_{1,1,1}(x,y,z)[A_{0,0,1}(x,y,z) +$$

$$+ \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{0,0,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)d\tau d\xi d\eta]dxdy + f_{0,0,1}(z),$$

$$(\omega_{1,1,0} f)(x,y) \equiv \int_{x}^{x_1} \int_{y}^{y_1} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(\alpha,\beta,z)[A_{0,0,0}(\alpha,\beta,z) +$$

$$+ \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;\alpha,\beta,z)d\tau d\xi d\eta]d\alpha d\beta dz +$$

$$+ \int_{y}^{y_1} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(x,\beta,z)[A_{1,0,0}(x,\beta,z) + \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{1,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,\beta,z)d\tau d\xi d\eta]d\beta dz +$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{x}^{x_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(\alpha,y,z)[A_{0,1,0}(\alpha,y,z)+\\
&+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{0,1,0}(\tau,\xi,\eta;\alpha,y,z)d\tau d\xi d\eta]d\alpha dz+\\
&+\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(x,y,z)[A_{1,1,0}(x,y,z)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{1,1,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)d\tau d\xi d\eta]dz+\\
&+f_{1,1,0}(x,y),
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

$$
\begin{aligned}
&(\omega_{0,1,1}f)(y,z)\equiv\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int_{y}^{y_1}\int_{z}^{z_1} f_{1,1,1}(x,\beta,\gamma)[A_{0,0,0}(x,\beta,\gamma)+\\
&+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma} K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,\beta,\gamma)d\tau d\xi d\eta]dxd\beta d\gamma+\\
&+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int_{z}^{z_1} f_{1,1,1}(x,y,\gamma)[A_{0,1,0}(x,y,\gamma)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma} K_{0,1,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,\gamma)d\tau d\xi d\eta]dxd\gamma+\\
&+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int_{y}^{y_1} f_{1,1,1}(x,\beta,z)[A_{0,0,1}(x,\beta,z)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{0,0,1}(\tau,\xi,\eta;x,\beta,z)d\tau d\xi d\eta]dxd\beta+\\
&+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1} f_{1,1,1}(x,y,z)[A_{0,1,1}(x,y,z)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{0,1,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)d\tau d\xi d\eta]dx+\\
&+f_{0,1,1}(y,z),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\omega_{1,0,1}f)(x,z)\equiv\\
&\equiv\int_{x}^{x_1}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int_{z}^{z_1} f_{1,1,1}(\alpha,y,\gamma)[A_{0,0,0}(\alpha,y,\gamma)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma} K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;\alpha,y,\gamma)d\tau d\xi d\eta]d\alpha dyd\gamma+\\
&+\int_{y_0}^{y_1}\int_{z}^{z_1} f_{1,1,1}(x,y,\gamma)[A_{1,0,0}(x,y,\gamma)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma} K_{1,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,\gamma)d\tau d\xi d\eta]dyd\gamma+
\end{aligned}
$$

$$+\int_{x}^{x_1}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} f_{1,1,1}(\alpha,y,z)[A_{0,0,1}(\alpha,y,z)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}K_{0,0,1}(\tau,\xi,\eta;\alpha,y,z)d\tau d\xi d\eta]d\alpha dy+$$

$$+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} f_{1,1,1}(x,y,z)[A_{1,0,1}(x,y,z)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}K_{1,0,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)d\tau d\xi d\eta]dy+$$

$$+\ f_{1,0,1}(x,z),$$

$$(\omega_{1,1,1}f)(x,y,z)\equiv f_{1,1,1}(x,y,z)+\int_{x}^{x_1}\int_{y}^{y_1}\int_{z}^{z_1} f_{1,1,1}(\alpha,\beta,\gamma)[A_{0,0,0}(\alpha,\beta,\gamma)+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma}K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;\alpha,\beta,\gamma)d\tau d\xi d\eta]d\alpha d\beta d\gamma+$$

$$+\int_{y}^{y_1}\int_{z}^{z_1} f_{1,1,1}(x,\beta,\gamma)[A_{1,0,0}(x,\beta,\gamma)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma}K_{1,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,\beta,\gamma)d\tau d\xi d\eta]d\beta d\gamma+$$

$$+\int_{x}^{x_1}\int_{z}^{z_1} f_{1,1,1}(\alpha,y,\gamma)[A_{0,1,0}(\alpha,y,\gamma)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma}K_{0,1,0}(\tau,\xi,\eta;\alpha,y,\gamma)d\tau d\xi d\eta]d\alpha d\gamma+$$

$$+\int_{x}^{x_1}\int_{y}^{y_1} f_{1,1,1}(\alpha,\beta,z)[A_{0,0,1}(\alpha,\beta,z)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}K_{0,0,1}(\tau,\xi,\eta;\alpha,\beta,z)d\tau d\xi d\eta]d\alpha d\beta+$$

$$+\int_{z}^{z_1} f_{1,1,1}(x,y,\gamma)[A_{1,1,0}(x,y,\gamma)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma}K_{1,1,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,\gamma)d\tau d\xi d\eta]d\gamma+$$

$$+\int_{x}^{x_1} f_{1,1,1}(\alpha,y,z)[A_{0,1,1}(\alpha,y,z)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}K_{0,1,1}(\tau,\xi,\eta;\alpha,y,z)d\tau d\xi d\eta]d\alpha+$$

$$+\int_{y}^{y_1} f_{1,1,1}(x,\beta,z)[A_{1,0,1}(x,\beta,z)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}K_{1,0,1}(\tau,\xi,\eta;x,\beta,z)d\tau d\xi d\eta]d\beta.$$

Используя равенство (11), т.е. равенство $f(Vu)=(V^{*}f)(u)$, а также общий вид линейных функционалов на $W_p^{(1,1,1)}(G)$ получим, что

оператор V имеет сопряженный оператор вида:
$V^* = (\omega_{0,0,0}, \omega_{1,0,0}, \omega_{0,1,0}, \omega_{0,0,1}, \omega_{1,1,0}, \omega_{0,1,1}, \omega_{1,0,1}, \omega_{1,1,1}) : \mathrm{E}_q^{(1,1,1)} \to \mathrm{E}_q^{(1,1,1)}$,
где операторы $\omega_{i,j,k}$ определяются посредством равенств (12). Поэтому сопряженное уравнение

$$V^* f = \Psi \tag{13}$$

можно записать в виде эквивалентной системы следующих уравнений:

$$\omega_{0,0,0} f \equiv \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(x,y,z)[A_{0,0,0}(x,y,z) +$$

$$+ \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)d\tau d\xi d\eta]dG + f_{0,0,0} = \psi_{0,0,0},$$

$$(\omega_{1,0,0} f)(x) \equiv \int_{x}^{x_1} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(\alpha,y,z)[A_{0,0,0}(\alpha,y,z) +$$

$$+ \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;\alpha,y,z)d\tau d\xi d\eta]d\alpha dy dz +$$

$$+ \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1.1.1}(x,y,z)[A_{1,0,0}(x,y,z) + \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{1,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)d\tau d\xi d\eta]dy dz +$$

$$+ f_{1,0,0}(x) = \psi_{1,0,0}(x),$$

$$(\omega_{0,1,0} f)(y) \equiv \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1} \int_{y}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} f_{1,1,1}(x,\beta,z)[A_{0,0,0}(x,\beta,z) +$$

$$+ \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,\beta,z)d\tau d\xi d\eta]dx d\beta dz +$$

$$+ \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(x,y,z)[A_{0,1,0}(x,y,z) + \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{0,1,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)d\tau d\xi d\eta]dx dz +$$

$$+ f_{0,1,0}(y) = \psi_{0,1,0}(y),$$

$$(\omega_{0,0,1} f)(z) \equiv \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} \int_{z}^{z_1} f_{1,1,1}(x,y,\gamma)[A_{0,0,0}(x,y,\gamma)+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma} K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,\gamma)d\tau d\xi d\eta]dxdyd\gamma+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} f_{1,1,1}(x,y,z)[A_{0,0,1}(x,y,z)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{0,0,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)d\tau d\xi d\eta]dxdy+$$

$$+f_{0,0,1}(z)=\psi_{0,0,1}(z),$$

$$(\omega_{1,1,0} f)(x,y) \equiv \int_{x}^{x_1} \int_{y}^{y_1} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(\alpha,\beta,z)[A_{0,0,0}(\alpha,\beta,z)+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;\alpha,\beta,z)d\tau d\xi d\eta]d\alpha d\beta dz+$$

$$+\int_{y}^{y_1} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(x,\beta,z)[A_{1,0,0}(x,\beta,z)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{1,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,\beta,z)d\tau d\xi d\eta]d\beta dz+$$

$$+\int_{x}^{x_1} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(\alpha,y,z)[A_{0,1,0}(\alpha,y,z)+$$

$$+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{0,1,0}(\tau,\xi,\eta;\alpha,y,z)d\tau d\xi d\eta]d\alpha dz+$$

$$+\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} f_{1,1,1}(x,y,z)[A_{1,1,0}(x,y,z)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{1,1,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)d\tau d\xi d\eta]dz+$$

$$+f_{1,1,0}(x,y)=\psi_{1,1,0}(x,y),$$

$$(\omega_{0,1,1} f)(y,z) \equiv \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1} \int_{y}^{y_1} \int_{z}^{z_1} f_{1,1,1}(x,\beta,\gamma)[A_{0,0,0}(x,\beta,\gamma)+$$

$$+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma}K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,\beta,\gamma)d\tau d\xi d\eta]dxd\beta d\gamma+$$

$$+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int\limits_{z}^{z_1}f_{1,1,1}(x,y,\gamma)[A_{0,1,0}(x,y,\gamma)+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma}K_{0,1,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,\gamma)d\tau d\xi d\eta]dxd\gamma+$$

$$+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int\limits_{y}^{y_1}f_{1,1,1}(x,\beta,z)[A_{0,0,1}(x,\beta,z)+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}K_{0,0,1}(\tau,\xi,\eta;x,\beta,z)d\tau d\xi d\eta]dxd\beta+$$

$$+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}f_{1,1,1}(x,y,z)[A_{0,1,1}(x,y,z)+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}K_{0,1,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)d\tau d\xi d\eta]dx+$$

$$+f_{0,1,1}(y,z)=\psi_{0,1,1}(y,z),$$

$$(\omega_{1,0,1}f)(x,z)\equiv$$

$$\equiv\int\limits_{x}^{x_1}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int\limits_{z}^{z_1}f_{1,1,1}(\alpha,y,\gamma)[A_{0,0,0}(\alpha,y,\gamma)+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma}K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;\alpha,y,\gamma)d\tau d\xi d\eta]d\alpha dyd\gamma+$$

$$+\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int\limits_{z}^{z_1}f_{1,1,1}(x,y,\gamma)[A_{1,0,0}(x,y,\gamma)+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma}K_{1,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,\gamma)d\tau d\xi d\eta]dyd\gamma+$$

$$+\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}f_{1,1,1}(x,y,z)[A_{1,0,1}(x,y,z)+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z}K_{1,0,1}(\tau,\xi,\eta;x,y,z)d\tau d\xi d\eta]dy+$$

$$+f_{1,0,1}(x,z)=\psi_{1,0,1}(x,z),$$

$$(\omega_{1,1,1}f)(x,y,z)\equiv f_{1,1,1}(x,y,z)+$$

$$+\int\limits_{x}^{x_1}\int\limits_{y}^{y_1}\int\limits_{z}^{z_1}f_{1,1,1}(\alpha,\beta,\gamma)[A_{0,0,0}(\alpha,\beta,\gamma)+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma}K_{0,0,0}(\tau,\xi,\eta;\alpha,\beta,\gamma)d\tau d\xi d\eta]d\alpha d\beta d\gamma+$$

$$+\int\limits_{y}^{y_1}\int\limits_{z}^{z_1}f_{1,1,1}(x,\beta,\gamma)[A_{1,0,0}(x,\beta,\gamma)+\int\limits_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int\limits_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta}\int\limits_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma}K_{1,0,0}(\tau,\xi,\eta;x,\beta,\gamma)d\tau d\xi d\eta]d\beta d\gamma+$$

$$+\int_x^{x_1}\int_z^{z_1} f_{1,1,1}(\alpha,y,\gamma)[A_{0,1,0}(\alpha,y,\gamma)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma} K_{0,1,0}(\tau,\xi,\eta;\alpha,y,\gamma)d\tau d\xi d\eta]d\alpha d\gamma+$$

$$+\int_x^{x_1}\int_y^{y_1} f_{1,1,1}(\alpha,\beta,z)[A_{0,0,1}(\alpha,\beta,z)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{0,0,1}(\tau,\xi,\eta;\alpha,\beta,z)d\tau d\xi d\eta]d\alpha d\beta+$$

$$+\int_z^{z_1} f_{1,1,1}(x,y,\gamma)[A_{1,1,0}(x,y,\gamma)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{\gamma} K_{1,1,0}(\tau,\xi,\eta;x,y,\gamma)d\tau d\xi d\eta]d\gamma+$$

$$+\int_x^{x_1} f_{1,1,1}(\alpha,y,z)[A_{0,1,1}(\alpha,y,z)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{\alpha}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{0,1,1}(\tau,\xi,\eta;\alpha,y,z)d\tau d\xi d\eta]d\alpha+ \qquad (14)$$

$$+\int_y^{y_1} f_{1,1,1}(x,\beta,z)[A_{1,0,1}(x,\beta,z)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{\beta}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z} K_{1,0,1}(\tau,\xi,\eta;x,\beta,z)d\tau d\xi d\eta]d\beta=\psi_{1,1,1}(x,y,z).$$

где

$\Psi=(\Psi_{0,0,0},\Psi_{1,0,0}(x),\Psi_{0,1,0}(y),\Psi_{0,0,1}(z),\Psi_{1,1,0}(x,y),\Psi_{0,1,1}(y,z),$

$\Psi_{1,0,1}(x,z),\Psi_{1,1,1}(x,y,z))\in \mathrm{E}_q^{(1,1,1)}$ - заданный, а

$f=(f_{0,0,0},f_{1,0,0}(x),f_{0,1,0}(y),f_{0,0,1}(z),f_{1,1,0}(x,y),f_{0,1,1}(y,z),$

$f_{1,0,1}(x,z),f_{1,1,1}(x,y,z))\in \mathrm{E}_q^{(1,1,1)}$

искомый элемент.

Последнее уравнение системы (14) является самостоятельным трехмерным интегральным уравнением. Очевидно, что оператор $\omega_{1,1,1}$ этого уравнения является вольтерровым относительно точки (x_1,y_1,z_1). Используя это, а также условия, наложенные на коэффициенты $A_{i,j,k}(x,y,z)$ можно доказать, что это уравнение для любой правой части $\Psi_{1,1,1}\in L_q(G)$ имеет единственное решение $f_{1,1,1}\in L_q(G)$. Очевидно, что, если известно решение $f_{1,1,1}$ последнего уравнения системы (14), то остальные компоненты решения:

$f=(f_{0,0,0},f_{1,0,0},f_{0,1,0},f_{0,0,1},f_{1,1,0},f_{0,1,1},f_{1,0,1},f_{1,1,1})\in \mathrm{E}_q^{(1,1,1)}$ можно вычислить посредством остальных равенств системы (14) при помощи решения $f_{1,1,1}\in L_q(G)$ последнего уравнения этой системы.

Следует отметить, также, что оператор $\omega_{1,1,1} : L_q(G) \to L_q(G)$ можно рассматривать как сопряженный оператор для оператора $N : L_q(G) \to L_q(G)$ эквивалентного интегрального уравнения. Иначе говоря, для всех $1 \le p \le \infty$ справедливо тождество

$$\iiint\limits_G (Nb)(x,y,z) f_{1,1,1}(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_G b(x,y,z)(\omega_{1,1,1} f_{1,1,1})(x,y,z)dxdydz,$$

$$b \in L_p(G),\ f_{1,1,1} \in L_q(G), \tag{15}$$

где $\omega_{1,1,1} f_{1,1,1} \equiv \omega_{1,1,1} f$.

Тождество (15) показывает, что, если $1 \le p < \infty$, то $N^* = \omega_{1,1,1}$, если же $1 < p \le \infty$, то $\omega_{1,1,1}^* = N$. Поэтому для всех $1 \le p \le \infty$ либо уравнение (8) является сопряженным уравнением для последнего уравнения системы (14), либо имеет место обратное утверждение. Это показывает, что уравнение (8) и последнее уравнение системы (14) являются «связанными» уравнениями. Поэтому из теоремы 1 следует, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Оператор $\omega_{1,1,1} : L_q(G) \to L_q(G)$ есть гомеоморфизм.

Следствие 1. Система (14) для любой $\Psi \in E_q^{(1,1,1)}$ имеет единственное решение $f \in E_q^{(1,1,1)}$, и при этом $\|f\|_{E_q^{(1,1,1)}} \le M \|\Psi\|_{E_q^{(1,1,1)}}$ где M положительное постоянное, не зависящее от Ψ .

6. Построение фундаментального решения для краевой задачи.

Теперь возьмем произвольную точку $(x,y,z) \in \overline{G}$ и рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \omega_{0,0,0} f = 1, \\ (\omega_{1,0,0} f)(\alpha) = \theta(x-\alpha), \alpha \in (x_0, x_1), \\ (\omega_{0,1,0} f)(\beta) = \theta(y-\beta), \beta \in (y_0, y_1), \\ (\omega_{0,0,1} f)(\gamma) = \theta(z-\gamma), \gamma \in (z_0, z_1), \\ (\omega_{1,1,0} f)(\alpha,\beta) = \theta(x-\alpha)\theta(y-\beta), (\alpha,\beta) \in G_1 \times G_2, \\ (\omega_{0,1,1} f)(\beta,\gamma) = \theta(y-\beta)\theta(z-\gamma), (\beta,\gamma) \in G_2 \times G_3, \\ (\omega_{1,0,1} f)(\alpha,\gamma) = \theta(x-\alpha)\theta(z-\gamma), (\alpha,\gamma) \in G_1 \times G_3, \\ (\omega_{1,1,1} f)(\alpha,\beta,\gamma) = \theta(x-\alpha)\theta(y-\beta)(z-\gamma), (\alpha,\beta,\gamma) \in G, \end{cases} \tag{16}$$

которая является частным случаем системы (14).

Определение 2. Если для каждой заданной точки $(x,y,z) \in \overline{G}$ система

(16) имеет хотя бы одно решение

$$f(x,y,z)=(f_{0,0,0}(x,y,z), f_{1,0,0}(\alpha;x,y,z), f_{0,1,0}(\beta;x,y,z), f_{0,0,1}(\gamma;x,y,z),$$

$$f_{1,1,0}(\alpha,\beta;x,y,z), f_{0,1,1}(\beta,\gamma;x,y,z), f_{1,0,1}(\alpha,\gamma;x,y,z), f_{1,1,1}(\alpha,\beta,\gamma;x,y,z))\in \mathrm{E}_q^{(1,1,1)},$$

то это решение будем называть фундаментальным (θ-фундаментальным) решением задачи (1), (2).

Последнюю компоненту $f_{1,1,1}(\alpha,\beta,\gamma;x,y,z)$ можно рассматривать как новую функцию Римана для краевой задачи поставленной на середине области. Можно показать, что, если коэффициенты $A_{i,j,k}(x,y,z)$ обладают непрерывными производными $D_x^i D_y^j D_z^k A_{i,j,k}(x,y,z)$ в области $\overline{G}$ и $K_{i,j,k}(\tau,\xi,\eta;\,x,\,y,\,z)\equiv 0$ то $f_{1,1,1}(\alpha,\beta,\gamma;x,y,z)$ на самом деле есть функция Римана в классическом смысле.

Теорема 3. Задача (1), (2) имеет единственное θ-фундаментальное решение $f(x,y,z)$. При этом решение $u\in W_p^{(1,1,1)}(G)$ задачи (1), (2) может быть представлено посредством θ-фундаментального решения в виде

$$\begin{aligned}
u(x,y,z)&=\varphi_{0,0,0}f_{0,0,0}(x,y,z)+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\varphi_{1,0,0}(\alpha)f_{1,0,0}(\alpha;x,y,z)d\alpha+\\
&+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\varphi_{0,1,0}(\beta)f_{0,1,0}(\beta;x,y,z)d\beta+\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1}\varphi_{0,0,1}(\gamma)f_{0,0,1}(\gamma;x,y,z)d\gamma+\\
&+\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1}\varphi_{0,0,1}(\gamma)f_{0,0,1}(\gamma;x,y,z)d\gamma+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\varphi_{1,1,0}(\alpha,\beta)f_{1,1,0}(\alpha,\beta;x,y,z)d\alpha d\beta+\\
&+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1}\varphi_{0,1,1}(\beta,\gamma)f_{0,1,1}(\beta,\gamma;x,y,z)d\beta d\gamma+\\
&+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1}\varphi_{1,0,1}(\alpha,\gamma)f_{1,0,1}(\alpha,\gamma;x,y,z)d\alpha d\gamma+\\
&+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1}\varphi_{1,1,1}(\alpha,\beta,\gamma)f_{1,1,1}(\alpha,\beta,\gamma;x,y,z)d\alpha d\beta d\gamma. \qquad (17)
\end{aligned}$$

Доказательство. Существование единственности θ-фундаментального решения следует из следствия 1. Для доказательства справедливости представлении (17) будем сравнивать правые части тождеств (9) и (11) на решениях $u \in W_p^{(1,1,1)}(G)$ и $f \in \mathrm{E}_q^{(1,1,1)}$ задачи (1), (2) и системы (16). Тогда получим:

$$\varphi_{0,0,0} f_{0,0,0}(x,y,z) + \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1} \varphi_{1,0,0}(\alpha) f_{1,0,0}(\alpha;x,y,z)d\alpha + \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} \varphi_{0,1,0}(\beta) f_{0,1,0}(\beta;x,y,z)d\beta +$$

$$+ \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} \varphi_{0,0,1}(\gamma) f_{0,0,1}(\gamma;x,y,z)d\gamma + \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} \varphi_{1,1,0}(\alpha,\beta) f_{1,1,0}(\alpha,\beta;x,y,z)d\alpha d\beta +$$

$$+ \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} \varphi_{0,1,1}(\beta,\gamma) f_{0,1,1}(\beta,\gamma;x,y,z)d\beta d\gamma +$$

$$+ \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} \varphi_{1,0,1}(\alpha,\gamma) f_{1,0,1}(\alpha,\gamma;x,y,z)d\alpha d\gamma +$$

$$+ \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} \varphi_{1,1,1}(\alpha,\beta,\gamma) f_{1,1,1}(\alpha,\beta,\gamma;x,y,z)d\alpha d\beta d\gamma =$$

$$= u(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}, \frac{z_0+z_1}{2}) +$$

$$+ \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1} u_x(\alpha, \frac{y_0+y_1}{2}, \frac{z_0+z_1}{2})\theta(x-\alpha)d\alpha + \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} u_y(\frac{x_0+x_1}{2}, \beta, \frac{z_0+z_1}{2})\theta(y-\beta)d\beta +$$

$$+ \int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} u_z(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}, \gamma)\theta(z-\gamma)d\gamma +$$

$$+ \int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1} \int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1} u_{xy}(\alpha,\beta,z)\theta(x-\alpha)\theta(y-\beta)d\alpha d\beta +$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} u_{yz}(\frac{x_0+x_1}{2},\beta,\gamma)\theta(y-\beta)\theta(z-\gamma)d\beta d\gamma + \\
&+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} u_{xz}(\alpha,\frac{y_0+y_1}{2},\gamma)\theta(x-\alpha)\theta(z-\gamma)d\alpha d\gamma + \\
&+\int_{\frac{x_0+x_1}{2}}^{x_1}\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\int_{\frac{z_0+z_1}{2}}^{z_1} u_{xyz}(\alpha,\beta,\gamma)\theta(x-\alpha)\theta(y-\beta)\theta(z-\gamma)d\alpha d\beta d\gamma
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Интегральное представление (4) функций $u \in W_p^{(1,1,1)}(G)$ показывает, что правая часть формулы (18) совпадает со значением $u(x,y,z)$ решения $u(\alpha,\beta,\gamma)$ в точке (x,y,z). Этим справедливость представления (17) доказана. Теорема доказана.

Литература

1. Colton D., Pseudoparabolic equations in one space variable, J. Diff. equat., Vol.12, No.3, (1972), pp.559–565.
2. Аманов Т.И., Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной, Наука, Алма-Ата, (1976), 171 с.
3. Ахиев С.С., Об общем виде линейных ограниченных функционалов в одном функциональном пространстве типа С. Л. Соболева, Докл. АН. Азерб. ССР, Vol.35, No.6, (1976), сс.3–7.
4. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М., Интегральные представления функций и теоремы вложения, Наука, М., (1975), 480 с.
5. Жегалов В.И., О трехмерной функции Римана, Сиб. матем. журн., Vol.36, No.5, (1997), сс.1074–1079.
6. Лизоркин П.И., Никольский С.М., Классификация дифференцируемых функций на основе пространств с доминирующей производной, Труды МИАН СССР, Vol.77, (1965), сс.143–167.
7. Мамедов И.Г., Абдуллаева А.Дж., О корректной разрешимости краевой задачи в неклассической трактовке заданной на середине области для одного интегро-дифференциального уравнения 3D Бианки, Journal of Contemporary Applied Mathematics, Vol.8, No.1, (2018), сс.69-80.
8. Мамедов И. Г., Абдуллаева А. Дж., Задача оптимального управления для одного интегро-дифференциального уравнения 3D Бианки с негладкими коэффициентами при условиях на арифметической середине области, Сумгаитский Государственный Университет: Научные Известия, Серия: Естественные и технические науки, Vol.19, No.3, (2019), сс.4-13.
9. Мамедов И.Г., Фундаментальное решение начально-краевой задачи для

псевдопараболического уравнения четвертого порядка с негладкими коэффициентами, Владикавк. матем. журн., Vol.12, No.1, (2010), сс.17-32.
10. Никольский С.М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М.: Наука, (1969), 455 с.
11. Шхануков М.Х., Солдатов А.П., Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка, Докл. АН СССР, Vol.297, No.3, (1987), сс.547–552.

FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A HYPERBOLIC INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF THE 3D BIANCHI TYPE

A.J. ABDULLAEVA
Sumgait State University, Sumgait, Azerbaijan
e-mail: aynure-huseynova-2015@mail.ru

ABSTRACT In the paper, a fundamental solution of boundary value problems for a hyperbolic integro-differential equation of the 3D Bianchi type with a dominant mixed third-order derivative with nonsmooth coefficients is constructed.

Keywords: hyperbolic integro-differential equations, boundary value problem, fundamental solutions.

References

1. Colton D., Pseudoparabolic equations in one space variable, J. Diff. equat., Vol.12, No.3, (1972), pp.559–565.
2. Amanov T. I., Prostranstva differenciruemyh funkcij s dominirujushhej smeshannoj proizvodnoj, Nauka, Alma-Ata, (1976), 171 s.(Amanov T. I., Spaces of differentiable functions with dominating mixed derivative, Nauka, Alma-Ata, (1976), 171 pp.) (in Russian)
3. Ahiev S.S., Ob obshhem vide linejnyh ogranichennyh funkcionalov v odnom funkcional'nom prostranstve tipa S. L. Soboleva, Dokl. AN. Azerb. SSR, Vol.35, No.6, (1976), ss.3–7(Akhiev S. S., On the general form of linear bounded functionals in a certain functional space of S. L. Sobolev type, Dokl. AN. Azerbaijan SSR, Vol.35, No.6, (1976), pp. 3–7.)(in Russian)
4. Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skij S.M., Integral'nye predstavlenija funkcij i teoremy vlozhenija, Nauka, M., (1975), 480 s. (Besov O.V., Il’in V.P., and Nikol’skii S.M., Integral representations of functions and embedding theorems, Nauka, M., (1975), 480 p.) (in Russian)
5. Zhegalov V.I. O trehmernoj funkcii Rimana, Sib. matem. zhurn., Vol.36, No.5, (1997), ss.1074–1079.(Zhegalov V.I., On the three-dimensional Riemann function, Sib. math. j., Vol.36, No.5, (1997), pp.1074–1079.) (in Russian)

6. Lizorkin P.I., Nikol'skij S.M., Klassifikacija differenciruemyh funkcij na osnove prostranstv s dominirujushhej proizvodnoj, Trudy MIAN SSSR, Vol.77, (1965), ss.143–167.(Lizorkin P.I., Nikol'skii S.M., Classification of differentiable functions based on spaces with dominating derivative, Trudy MIAN SSSR, Vol.77, (1965), pp.143–167.) (in Russian)
7. Mamedov I.G., Abdullaeva A.Dzh., O korrektnoj razreshimosti kraevoj zadachi v neklassicheskoj traktovke zadannoj na seredine oblasti dlja odnogo integro-differencial'nogo uravnenija 3D Bianki, Journal of Contemporary Applied Mathematics, Vol.8, No.1, (2018), ss.69-80.(Mamedov I.G., Abdullaeva A.J., On the correct solvability of a boundary value problem in a non-classical interpretation of a domain given in the middle for a 3D Bianchi integro-differential equation, Journal of Contemporary Applied Mathematics, Vol.8, No.1, (2018) , pp.69-80.)(in Russian)
8. Mamedov I. G., Abdullaeva A. Dzh., Zadacha optimal'nogo upravlenija dlja odnogo integro-differencial'nogo uravnenija 3D Bianki s negladkimi kojefficientami pri uslovijah na arifmeticheskoj seredine oblasti, Sumgaitskij Gosudarstvennyj Universitet: Nauchnye Izvestija, Serija: Estestvennye i tehnicheskie nauki, Vol.19, No.3, (2019), ss.4-13.(Mamedov I. G., Abdullayeva A. J., Optimal control problem for one 3D Bianchi integro-differential equation with non-smooth coefficients under conditions on the arithmetic middle of the domain, Sumgayit State University: Nauchnye Izvestia, Series: Natural and technical sciences, Vol.19, No.3, (2019), pp.4-13.) (in Russian)
9. Mamedov I. G., Fundamental'noe reshenie nachal'no-kraevoj zadachi dlja psevdoparabolicheskogo uravnenija chetvertogo porjadka s negladkimi kojefficientami, Vladikavk. matem. zhurn., Vol.12, No.1, (2010), ss.17-32. (Mamedov I. G., Fundamental solution of an initial-boundary value problem for a fourth-order pseudoparabolic equation with nonsmooth coefficients, Vladikavkaz. math. j., Vol.12, No.1, (2010), pp.17-32.) (in Russian)
10. Nikol'skij S.M., Priblizhenie funkcij mnogih peremennyh i teoremy vlozhenija, M.:Nauka, (1969), 455 s. (Nikol'skii S. M., Approximation of functions of several variables and embedding theorems, M.: Nauka, (1969), 455 pp.) (in Russian)
11. Shhanukov M.H., Soldatov A. P., Kraevye zadachi s obshhim nelokal'nym usloviem A.A. Samarskogo dlja psevdoparabolicheskih uravnenij vysokogo porjadka, Dokl. AN SSSR, Vol.297, No.3 (1987), ss.547–552. (Shkhanukov M. Kh., Soldatov A.P., Boundary value problems with A.A. Samarskii's general nonlocal condition for higher-order pseudoparabolic equations, Dokl. AN USSR, Vol.297, No.3, (1987), pp.547–552.) (in Russian)